Appunti di telecomunicazioni

1. La modulazione di frequenza

Come nel caso della modulazione d'ampiezza, consideriamo due semplici segnali sinusoidali.
Nella modulazione di frequenza viene trasmesso un segnale portante di ampiezza costante del quale si fa variare la frequenza in modo proporzionale all'ampiezza del segnale modulante. Le frequenze dei due segnali devono essere molto differenti tra loro e in particolare si deve ricordare che $\omega_p >> \omega_m$. In generale la modulazione di frequenza viene utilizzata per rendere un segnale compatibile con il mezzo trasmissivo e in particolare, onde ridurre la possibilità di disturbi e perdite di informazioni, i segnali modulanti vengono "traslati" verso frequenze molto più elevate di quelle originali.
Indichiamo con $V_m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$ il segnale modulante nella sua forma più semplice e con $V_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$ il segnale portante. Per quanto detto a proposito della generazione del segnale modulato, si possono riconoscere le seguenti corrispondenze tra la frequenza del segnale portante e l'ampiezza del segnale modulante:

$A_{m,\max} \to f_{p,\max}$

$A_{m,\min} \to f_{p,\min}$

$A_m = 0 \to f_p = f_{p\ non\,\mathrm{mod}\,ulato}$

La pulsazione istantanea della portante modulate viene indicata con $\omega(t) = \omega_p + kV_m(t)$, dove k è una costante reale e rappresenta la variazione della pulsazione per variazione di tensione del segnale modulante. In termini dimensionali: $[k_\omega] = \left[\frac{rad/s}{V}\right]$ oppure $[k_f] = \left[\frac{Hz}{V}\right]$, a seconda che si consideri la pulsazione o la frequenza. In termini di pulsazione, quindi, valgono le relazioni:

$\omega(t) = \omega_p + kA_m \cos(\omega_m t)$ *(1.1)*

$\omega_{\max} = \omega_p + k_\omega A_m$

$\omega_{\min} = \omega_p - k_\omega A_m$, mentre per le frequenze:

$f_{\max} = f_p + k_f A_m$

$f_{\min} = f_p - k_f A_m$

Da queste relazioni ricaviamo l'espressione della *deviazione di frequenza*, mettendo in risalto la sua proporzionalità diretta con l'ampiezza della modulante:

$\Delta f = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} = k_f A_m$ *(1.2)*

Per la modulazione di frequenza definiamo l'*indice di modulazione* come rapporto tra la deviazione di frequenza e la frequenza del segnale modulante:

$\alpha = \frac{\Delta f}{f_m}$ *(1.3)*

Vediamo ora come sia possibile determinare la pulsazione istantanea del segnale modulato.
Posto $\beta(t) = \omega_p t$, segue l'espressione per il segnale modulato: $V_O = A_p \cos \beta(t)$.

All'istante generico t dovrà valere: $\beta(t)=\int_0^t \omega(t)dt=\int_0^t (\omega_p + kA_m \cos(\omega_m t))dt=$

$=\int_0^t \omega_p dt + \int_0^t (kA_m \cos(\omega_m t))dt \; = \omega_p t + \frac{kA_m}{\omega_m} sen(\omega_m t) = \omega_p t + \alpha\, sen(\omega_m t)$, dove si dimostra facilmente l'introduzione dell'indice di modulazione α.
Tornando all'espressione per il segnale modulato:

$$V_O(t) = A_p \cos\left(\omega_p t + \frac{kA_m}{\omega_m} sen(\omega_m t)\right) = A_p \cos(\omega_p t + \alpha\, sen(\omega_m t)) \quad (1.4)$$

questa può essere posta in forma di serie utilizzando le funzioni di Bessel:

$$\begin{aligned} V_O(t) = J_0(\alpha)A_p \cos(\omega_p t) - J_1(\alpha)A_p \cos[(\omega_p - \omega_m)t] + J_1(\alpha)A_p \cos[(\omega_p + \omega_m)t] + \\ + J_2(\alpha)A_p \cos[(\omega_p - 2\omega_m)t] + J_2(\alpha)A_p \cos[(\omega_p + 2\omega_m)t] + \\ - J_3(\alpha)A_p \cos[(\omega_p - 3\omega_m)t] + J_3(\alpha)A_p \cos[(\omega_p + 3\omega_m)t] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Da quanto brevemente esposto, possiamo sottolineare come lo spettro del segnale modulato in frequenza abbia 2 bande laterali composte da un numero infinito di righe, la cui larghezza è teoricamente infinita. I contributi dei termini nella serie sono comunque limitati e si deve tener presente che $J_0^{\,2} + \sum_{i=1}^{\infty} J_i^{\,2} = 1$.
E' bene far notare come l'ampiezza di ciascuna riga sia determinata dal valore dell'ampiezza del segnale portante e dal valore della funzione "j-esima" di Bessel espressa in funzione dell'indice di modulazione. Quanto appena detto è quantificato formalmente dal prodotto $J_i(\alpha)\cdot A_p$. Ciascun termine della serie è individuato dal valore della funzione di Bessel; tali valori sono presenti in tabelle. In particolare, per $\alpha = 2{,}4$ si ha che $J_0(\alpha) = 0{,}0$. In tale condizione, la riga spettrale determinata dalla frequenza della portante scompare e tutta la potenza trasmessa viene distribuita interamente sulle bande laterali. In questo modo il rendimento di trasmissione, sempre definito come rapporto tra la potenza di una banda laterale e la potenza totale trasmessa, risulta essere massimo. E' da notare, inoltre, che la potenza trasmessa dal segnale modulato non è altro che la potenza del segnale portante non modulato, in quanto non ne viene modificata l'ampiezza con la modulazione. Da ciò segue che l'espressione della potenza trasmessa può essere posta nel modo:

$$P_{tr,FM} = P_{pnon\,modulata} = \frac{A_p^{\,2}}{2R}.$$

Concludendo, il rendimento di trasmissione può essere aumentato rendendo minimo il valore della componente $J_0(\alpha)$, poiché in tale modo si aumenta la potenza associata alle bande laterali.